

Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

Inleiding

Al in de 18e eeuw bedacht Daniel Bernoulli het natuurkundige principe om te vliegen. De wet van Bernoulli is de wet van behoud van energie voor een sterk vereenvoudigde situatie waarin alleen druk, snelheid en hoogte veranderen. De wet van Bernoulli is een van de basisprincipes van de stromingsleer en ligt ten grondslag aan vele toepassingen. In de meteorologie en hydrologie, die in Wageningen wordt bestudeerd, wordt de wet van Bernoulli gebruikt om de energietoestand van stromende vloeistoffen en gassen te meten. Tijdens het uitvoeren van deze proef leer je de wet van Bernoulli toe te passen in alledaagse situaties. Vaak realiseer je je niet dat er een verband kan worden gezocht met deze wet die al in de 18e eeuw bekend was.

Een venturi (onderdeel van de carburateur van een motor, maar ook gebruikt in apparatuur om de stroomsnelheid van water te meten) en het infuus zijn voorbeelden waar de Wet van Bernoulli om de hoek komt kijken. Met de venturi-opstelling van dit experiment kun je een goed gevoel krijgen wanneer en hoe de wet van Bernoulli toepasbaar is en wat de beperkingen zijn.

Doel

De bruikbaarheid van de Wet van Bernoulli in verschillende omstandigheden (stromingen) testen.

Theorie

Volgens de wet van Bernoulli, geïntroduceerd door Daniel Bernoulli (1700 – 1782) zal de druk van een vloeistof of gas afhangen van de stroomsnelheid en de hoogte van het medium: hoe groter de stroomsnelheid, des te lager zal de druk zijn. In feite beschrijft deze wet de wet van behoud van energie voor een sterk vereenvoudigde situatie waarin alleen druk, snelheid en hoogte veranderen.

Afleiding wet van Bernoulli

Een stromende vloeistof (of gas) kan beschouwd worden als een systeem dat 2 soorten energie bevat: kinetische energie ($\frac{1}{2}mv^2$) en potentiële energie (mgh). Omdat de potentiële energie van de hoogte afhangt, wordt dit ook wel eens (stijg)hoogte-energie genoemd.



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

Wanneer op dit systeem netto arbeid wordt uitgeoefend, zal de totale hoeveelheid energie veranderen. Deze arbeid (W) kan bijvoorbeeld het gevolg zijn van een drukverschil tussen twee plaatsen in de stroming, werkend op het zich ertussen bevindende volume (V): $W = \Delta P \cdot V$. Volgens de wet van behoud van energie moet de totale energie van het volume dus ook toenemen met $\Delta P \cdot V$ (of afnemen als ΔP negatief is); dat is immers de netto arbeid die wordt uitgeoefend op het volume. In formulevorm kunnen we dat als volgt opschrijven:

$$W = \Delta E \Rightarrow \Delta P \cdot V = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgh\right) \quad (1)$$

Wanneer we beide zijden door het volume delen vinden we de Bernoulli vergelijking in zijn meest gebruikte vorm:

$$P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = C \quad (2)$$

met:

P	=	druk (Pa)
ρ	=	dichtheid van gebruikte medium (kg/m ³)
g	=	gravitatie versnelling (m/s ²), in Nederland: 9.81 m/s ²
h	=	stijghoogte medium in stijgbuis (m)
v	=	stroomsnelheid van het medium (m/s)
C	=	constante (Pa)

De constante C is constant binnen één Bernoulli systeem, dat wil zeggen een systeem waarin alleen snelheid, druk en plaats veranderen.

De eenheid van de vergelijking is in Pascal, dus alle termen in de vergelijking van Bernoulli eenheden kunnen geïnterpreteerd worden in de vorm van druk:

P	=	Extern opgelegde druk (meestal luchtdruk)
ρgh	=	Hydrostatische druk, de druk van gebruikte medium
$\frac{1}{2}\rho v^2$	=	Snelheidsdruk, de druk die veroorzaakt wordt door de snelheid van de vloeistof. Stel je dit voor als de druk die ontstaat bij het tegenhouden van een stromende vloeistof.

Toepassingen wet van Bernoulli

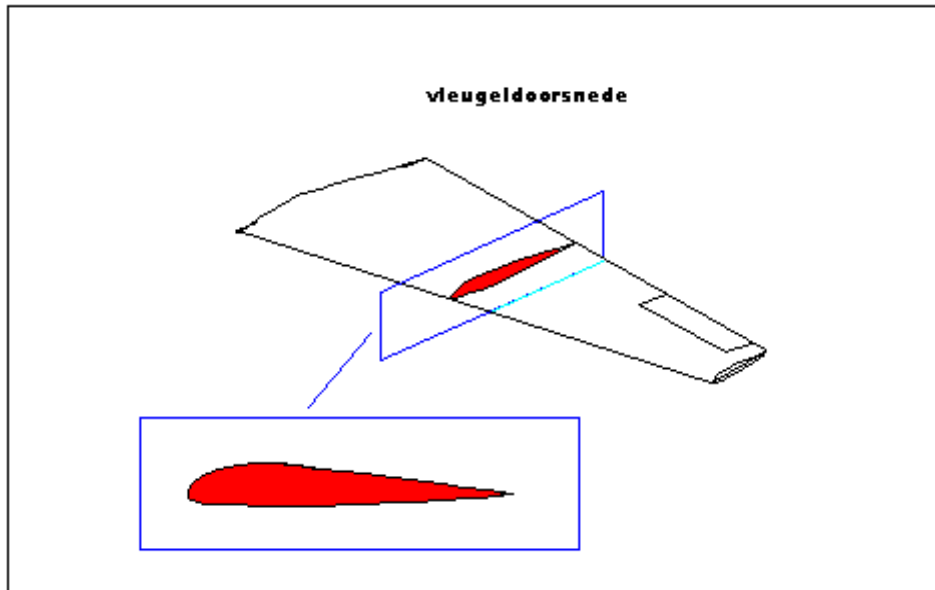
Vliegtuigvleugel

Met behulp van de wet van Bernoulli is uit te leggen waarom een vliegtuig kan vliegen. Als een dwarsdoorsnede van een vliegtuigvleugel beschouwd wordt (Figuur 1), dan blijkt de bovenkant bol te zijn en de onderkant vlakker (of zelfs hol).



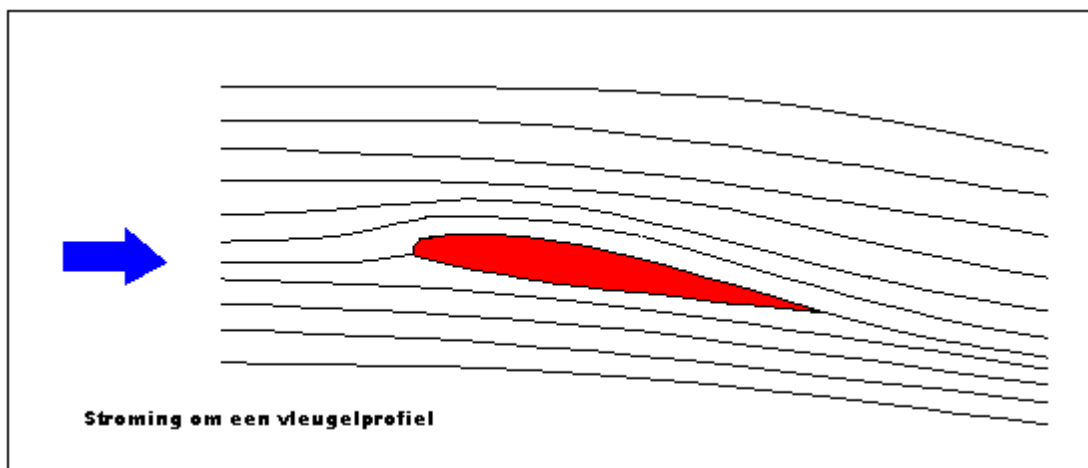
Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-



Figuur 1: schets van een vliegtuigvleugel

De bovenkant van de vleugel vormt een groter obstakel voor de lucht dan de onderkant: om toch langs de vleugel te stromen moet de lucht versneld worden, zodat de lucht aan de bovenkant sneller stroomt dan aan de onderkant van de vleugel. Omdat de snelheid van de lucht aan de bovenkant hoger is, neemt de druk *af* ten opzichte van de onderkant van de vleugel. Hierdoor ontstaat er een opwaartse kracht die er voor zorgt dat het vliegtuig kan blijven vliegen zolang het vliegtuig een bepaalde snelheid heeft. Door het drukverschil tussen onderkant en bovenkant van de vleugel wordt de vleugel omhoog geduwd. Snelheid is hierbij erg belangrijk, zonder snelheid bestaat dit effect namelijk niet! In Figuur 2 is het stromingspatroon rondom een vliegtuigvleugel geschetst.



Figuur 2: stromingspatroon rond een vliegtuigvleugel (dwarsdoorsnede)

Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

Een infuus

De wet van Bernoulli vindt ook zijn toepassing in een ziekenhuis. Indien een patiënt een infuus nodig heeft, moet dit op een bepaalde hoogte boven de arm van de patiënt hangen. Als het infuus te laag hangt zal de bloeddruk hoger zijn dan de hydrostatische druk van het infuusreservoir en zal er bloed van de patiënt in de infuusslang lopen. De hoogte waarop een infuus minimaal moet hangen, kan worden berekend met de vergelijking van Bernoulli (2).

De gemiddelde menselijke bloeddruk is $2.4 \cdot 10^3$ Pa. De hydrostatische druk in het infuus moet dus minimaal gelijk zijn aan de bloeddruk. Dit leidt tot de volgende vergelijking waaruit de minimale hoogte volgt waarop het infuus moet hangen (de snelheidsterm is hier verwaarloosbaar):

$$\begin{aligned} P_{\text{bloed}} &= P_{\text{hydrostatisch}} \\ 2.4 \cdot 10^3 &= \rho gh \end{aligned} \quad (3)$$

Hieruit volgt: $h = 0.245$ m (infuusvloeistof heeft een dichtheid van 1000 kg/m^3). Voor evenwicht moet het infuus dus op minimaal 24,5 centimeter boven de arm van de patiënt hangen.

Een venturibuis

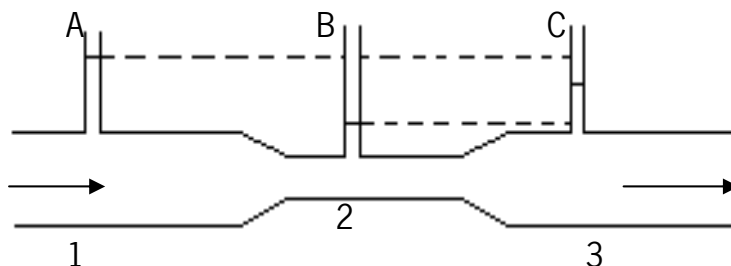
Ook om de stroomsnelheid van gassen of vloeistoffen in een afgesloten buis te meten kan gebruik gemaakt worden van de wet van Bernoulli. In de buis waar door het te bemeten medium stroomt, wordt een vernauwing aangebracht (een Venturibuis, zie Figuur 3). Omdat er overal door de buis evenveel water (of een ander vloeistof of gas) moet stromen (anders zouden er ophopingen plaatsvinden) geldt de continuïteitsvergelijking:

$$\left(\frac{A \cdot s}{t}\right)_A = \left(\frac{A \cdot s}{t}\right)_B \Rightarrow A_A \cdot v_A = A_B \cdot v_B \quad (4)$$

met:

- A = oppervlak dwarsdoorsnede (m^2)
- s = door medium afgelegde weg (m)
- t = tijd (s)
- v = stroomsnelheid medium (m/s)

(subscripts A en B geven resp. de positie A en B in de buis aan, zie figuur 3)



Figuur 3: een venturibuis met 3 piëzometers



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

Door de stijghoogte van het stromende medium vóór de vernauwing (punt A in Figuur 3) en in de vernauwing (punt B in Figuur 3) te meten kan de stroomsnelheid bepaald worden. Door de continuïteitsvergelijking (4) te combineren met Bernoulli's vergelijking (2) kan de stroomsnelheid (v_A) van het medium bepaald worden (de luchtdruk is gelijk in A en B en valt weg):

$$v_A = \sqrt{\frac{2g \cdot (h_A - h_B)}{\left(\left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2 - 1\right)}} \quad (5)$$



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

Proefopstellingen

Bernoulli-opstelling

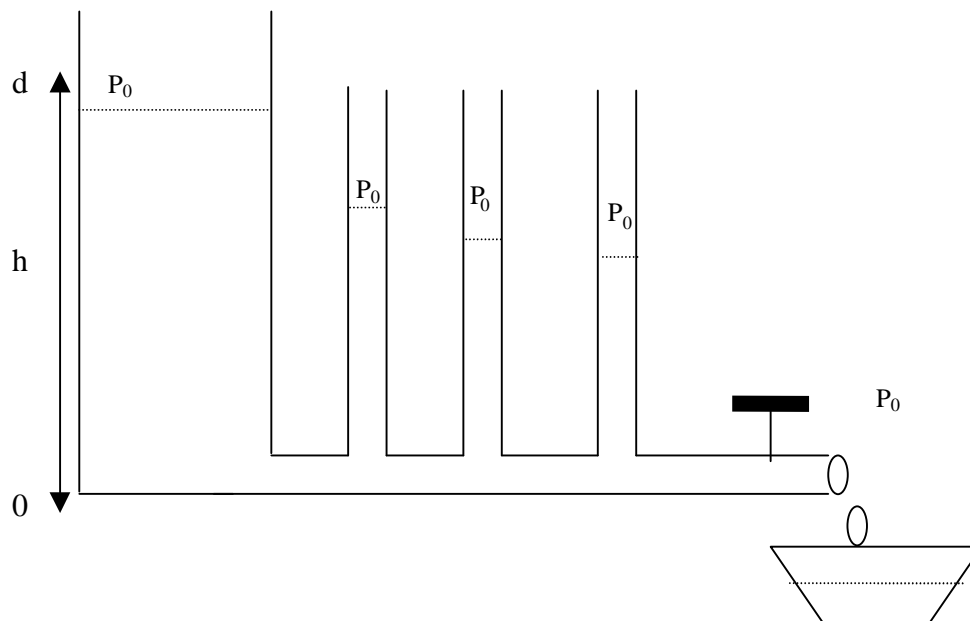
De Bernoulli-vergelijking (2) kan goed worden bestudeerd met een opstelling zoals in figuur 4. In de figuur staat de luchtdruk aangegeven met P_0 . Uiterst links staat een reservoir afgebeeld met een waterhoogte h .

Aan de linkerkant, in het reservoir, is alleen potentiële energie aanwezig. Hoe hoger de waterhoogte in het reservoir, hoe groter de potentiële energie. De hydrostatische druk (hydro = water, statisch = stilstaand) is daar:

$$P_{\text{hydrostatisch}} = \rho gh \quad (6)$$

Deze hydrostatische druk (potentiële energie) wordt in het ideale geval (geen wrijving) volledig omgezet in stroming (kinetische energie) in de horizontale pijp:

$$P_{\text{snelheid}} = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (7)$$



Figuur 4: Bernoulli-opstelling, een waterreservoir dat leegloopt

In de horizontale pijp vindt dus een stroming van water plaats ten gevolge van een drukverschil tussen het waterreservoir en het uitstroompunt. In formules:

$$P_0 + \rho gh + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (8)$$

De linkerkant van formule (8) is de wet van Bernoulli ingevuld voor het reservoir, de rechterkant is de wet van Bernoulli ingevuld voor het uitstroompunt. Deze twee delen



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

moeten aan elkaar gelijk zijn omdat beide delen gelijk zijn aan de constante C (zie formule (2)). Uit formule (8) valt dus de snelheid bij het uitstroompunt te berekenen als je de waterhoogte in het reservoir weet:

$$v_{\text{uitstroom}} = \sqrt{2gh} \quad (9)$$

In principe geldt de vergelijking van Bernoulli (2) in ieder willekeurig punt in Figuur 4. Hierdoor kunnen we de druk (hydrostatische- en snelheidsdruk samen) meten door de stijghoogte in een verticale buis te meten. Er zijn dus twee manieren om met druk in stromingen te rekenen: uitgedrukt in werkelijke druk (in Pa bijvoorbeeld), of uitgedrukt in stijghoogte. Deze eerste manier is meer algemeen, deze laatste manier is meer inzichtelijk voor de praktijk.

De stijghoogtes in buizen A, B en C zou volgens de wet van Bernoulli exact gelijk moeten zijn in de opstelling van figuur 4. Dit is in de praktijk niet het geval omdat het water wrijving krijgt van de buis. Omdat de wet van Bernoulli geen rekening houdt met wrijving, moet er dus nog wat worden aangepast in de berekening. In de volgende paragraaf lees je hoe je met wrijvingseffecten rekening kan houden.

Wrijvingseffecten Bernoulli-opstelling

In werkelijkheid vertonen de verticale buizen (piëzometers) die verbonden zijn met de horizontale buis (zie figuur 4) een afnemende hoogte. De hydrostatische druk neemt dus af vanaf het reservoir tot het uitstroompunt. Dit komt omdat het medium in werkelijkheid wrijving ondervindt, zowel van de wand als intern (door de vloeistof zelf). Door dit energieverlies zal de werkelijke stroomsnelheid lager zijn de theoretische stroomsnelheid die uit vergelijking (9) valt te berekenen.

Het is mogelijk de werkelijke stroomsnelheid in de buis experimenteel te bepalen door te meten hoe snel het water de horizontale buis verlaat. Indien er in een bepaalde tijd t , een volume (V) water stroomt uit een buis met een oppervlakte A (m^2), dan is de gemiddelde snelheid in de buis:

$$v_{\text{gemeten}} = \frac{V}{At} \quad (10)$$

Door deze snelheid uit te rekenen en te vergelijken met de theoretische snelheid uit vergelijking (9) wordt een indruk verkregen van de invloed van de wrijving.

Wrijvingseffecten hangen onder andere af van de 'dikte' van de vloeistof: als het reservoir gevuld wordt met een stroperige vloeistof, dan zal het langer duren voordat het reservoir leeg gelopen is omdat de vloeistof dikker is. Dit komt omdat een 'dikke' vloeistof meer wordt tegengehouden door de wand dan een dunnere, vluchtigere vloeistof. Een algemene uitdrukking voor de mate van stroperigheid is *viscositeit*. Over de precieze achtergrond van viscositeit zal niet worden ingegaan bij deze proef.

De viscositeit en enkele andere kenmerken van de buis (ruwheid, diameter, lengte) en de vloeistof (dichtheid) bepalen uiteindelijk de wrijvingsverliezen in de buis. De effecten van



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

viscositeit en de ruwheid van de buis kunnen worden samengevoegd in één constante, die we hier f ('friction factor' = wrijvingsfactor) noemen. De wrijving is dan te berekenen uit het hoogteverschil (Δh) tussen twee (gelijke) buizen:

$$\Delta h = f \cdot \frac{L \cdot v^2}{2 \cdot D \cdot g} \quad (11)$$

met

L de lengte van de buis (m)

D de diameter van de buis (m)

Venturi-opstelling

Bij de opstelling uit figuur 4 moet je, zelfs zonder wrijving, de waterhoogte in het reservoir meten om de snelheid uit te rekenen.

Bij een Venturi-buis kan de snelheid echter worden berekend zonder de waterhoogte in het reservoir te weten. Op pagina 5 staat een voorbeeld van Venturi-buis, en met vergelijking 5 valt de snelheid uit te rekenen. Hierbij is alleen de stijghoogte in de buizen nodig; niet de waterhoogte van het reservoir.

Bedenk wel weer: deze vergelijking is alleen voor een wrijvingsloze situatie. Ook hier spelen wrijvingseffecten een rol, dus moeten we daarmee rekening houden om juiste waarden te krijgen.

Wrijvingseffecten Venturi-opstelling

Net als bij de Bernoulli-opstelling (figuur 4) treedt er wrijving aan de wanden van de buis op. Vergelijking (11) kan worden gebruikt om het stijghoogteverlies door wrijving uit te rekenen. Behalve energieverlies door wrijving in het stuk rechte buis, treedt er ook een fors energieverlies op in de versmalling en verwijding. Dit is vergelijkbaar met een stroming die een luwte vormt achter een bewegend voorwerp, de bekende 'slipstream'. Dit effect ken je vast wel bij sporten als wielrennen, schaatsen of autosport.

Naar dit soort wrijving en stroming wordt nog volop onderzoek gedaan, en het energieverlies door deze 'slipstream' valt dus niet gemakkelijk met een formule te berekenen. Gelukkig kunnen we met de wet van Bernoulli en wrijving in een rechte buis (te meten in Bernoulli-opstelling) wel alle andere effecten berekenen: het restant van het energieverlies moet dan wel veroorzaakt zijn door de vorm van de Venturibuis. Op die manier kunnen we dus met deze proef experimentele waarden vinden voor weerstand in een Venturi-buis.



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

Uitvoering

Materialen

- Waterreservoir opstelling + slang
- Plank met aan twee zijden glazen buizen ('Bernoulli' en 'Venturi')
- Stopwatch
- Liniaal
- Pen en papier
- Bekerglas 1 liter

Proefbeschrijving

Bernoulli-opstelling

- Vul het waterreservoir met water tot ongeveer 30 cm. Zorg dat je het vat hierna niet meer hoeft te verplaatsen.
- Maak de uitstroomslang (met kraantje) vast aan de uitstroomopening van de opstelling en let op dat het kraantje dicht is. Sluit de uniforme buis (de 'Bernoulli-zijde' van de opstelling) aan op het vat. Maak een schets van de opstelling en de waterniveaus (onder het kopje 'resultaten').
- Verwijder alle luchtbellens uit het systeem door kantelen en blazen in de piëzometers. Open het kraantje. Maak een schets van de nieuwe situatie tijdens het leeglopen van het waterreservoir.
- Meet de waterniveaus in de piëzometers en vul tabel 1 in.
- Vul het reservoir nogmaals tot 30 cm. Zorg dat er geen luchtbellens in het systeem zitten
- Verwijder de kurk van het reservoir, en laat het reservoir tot 3/4 (=23 cm) leeglopen. Noteer tijdens dit leeglopen in tabel 2 tenminste 3 maal de tijd die nodig is om een maatbeker vol te laten lopen.
- Noteer in Tabel 2 ook de gemiddelde hoogte van het water in het reservoir.
- Herhaal de metingen voor de volgende hoogte-intervallen in de eerste kolom van tabel 2.

Venturi-opstelling

- Vul het waterreservoir tot ongeveer 30 cm.
- Sluit de venturibuis (de 'Venturi-zijde' van de opstelling) met behulp van een slang aan op het waterreservoir. Zorg dat het kraantje aan de uitstroomslang dicht zit en dat er geen luchtbellens in het systeem zitten.
- Open het kraantje. Indien blijkt dat de opstelling luchtbellens aanzuigt, plaats dan de uitstroomopening iets hoger; rond het niveau van de bodem van het reservoir of zoveel hoger als nodig is. Het referentieniveau schuift nu dus mee.
- Meet 3 keer, vrij snel achterelkaar, hoe lang het duurt voordat de maatbeker vol zit. Meet tegelijkertijd de waterhoogten in de piëzometers. Vul de metingen in tabel 3 in.
- Hervul het waterreservoir tot ongeveer 30 cm.
- Open het kraantje zodanig dat het evenwicht in piëzometer C zich instelt rond 20 cm.



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

- Meet 3 keer, vrij snel achterelkaar, hoe lang het duurt voordat de maatbeker vol zit en de waterhoogten in de piëzometers. Vul de metingen in tabel 4 in.

Resultaten

Bernoulli-opstelling

Schets hier de Bernoulli-opstelling met stop en zonder stop.

Piëzometer	A	B	C
Water hoogte (cm)			

Tabel 1. Waterhoogtes tijdens het leeglopend reservoir

Wat is het volume van de gebruikte maatbeker?

Hoogte reservoir (cm)	Leeglooptijd				Gem. hoogte (m)	Snelheid uit het debiet (vergelijking 12)	Snelheid volgens Bernoulli (vergelijking 11)
	1 (s)	2 (s)	3 (s)	Gem. (s)			
30-23							
23-16							
16-9							
9-2							

Tabel 2: Metingen Bernoulli-opstelling



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

Venturi-opstelling

	Tijd voor vullen maatbeker (s)	Stijghoogte Piëzometer			Debiet (m ³ /s)
		A (m)	B (m)	C (m)	
Meting 1					
Meting 2					
Meting 3					
Gemiddelde					

Tabel 3 Venturi-opstelling met kraantje helemaal open

	Tijd voor vullen maatbeker (s)	Stijghoogte Piëzometer			Debiet (m ³ /s)
		A (m)	B (m)	C (m)	
Meting 1					
Meting 2					
Meting 3					
Gemiddelde					

Tabel 4 Venturi-opstelling met kraantje half dicht (Piëzometer C rond 20 cm)

Vragen

Vooraf

1. Leid vergelijking 5 af met behulp van de continuïteitsvergelijking en de wet van Bernoulli.

Bernoulli-opstelling

2. Verklaar het in tabel 1 waargenomen verloop in waterhoogte.

3. Is het verval in waterhoogte bij benadering lineair? Laat zien.



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

4. Bereken de gemiddelde leeglooptijd en hoogte in Tabel 2, en vul de bijbehorende kolom in.
5. Bereken de gevraagde snelheden in Tabel 2 (laatste kolommen) als bekend is dat de oppervlakte van de doorsnede van de buis $5.02 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ is
6. Vergelijk de gemeten (uit het debiet) en de theoretische (Bernoulli) snelheid en verklaar het verschil.

Venturi-opstelling

7. Vul tabellen 3 en 4 in verder in.
8. Reken de snelheden uit in het vernauwde en het niet-vernauwde deel van de buis, zowel voor de opstelling met vrije uitstroom als voor de opstelling met beperkte uitstroom, op basis van tabellen 3 en 4. Gegeven is dat de oppervlakten van de doorsneden van de buizen $5.02 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ en $1.26 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ bedragen. Deze berekening kan op 2 verschillende manieren: met behulp van vergelijking 5 vind je de ‘theoretische’ snelheden (volgens Bernoulli), via vergelijking 12 de ‘gemeten’ (uit het debiet). Vul de resultaten in in tabel 5. De laatste regel van tabel 5 hoef je pas later in te vullen.

		Vrije uitstroom	Beperkte uitstroom
$V_{A \text{ en } C}$ theorie	(m/s)		
$V_{A \text{ en } C}$ gemeten	(m/s)		
V_B theorie	(m/s)		
V_B gemeten	(m/s)		
V_B gecorrigeerd	(m/s)		

Tabel 5. Snelheden in de venturi-buis



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

9. Vergelijk de snelheden in tabel 5 en verklaar eventuele verschillen.

10. De snelheid berekend volgens de wet van Bernoulli (vergelijking 5) kan niet kloppen, aangezien uit het verschil in stijghoogte tussen buis A en C blijkt dat er sprake is van wrijving. Wanneer we dit wrijvingseffect lineair veronderstellen (zie ook vraag 3) kunnen we voor de wrijving corrigeren. Daarmee krijgen we een gecorrigeerde stijghoogte in punt B. Deze gecorrigeerde waarde noemen we B^* . Bereken B^* voor zowel de situatie met het kraantje volledig open als de situatie met het kraantje half gesloten.

B^* kraantje open (in m):

B^* kraantje half gesloten (in m):

11. Bereken met behulp van deze gecorrigeerde stijghoogtes opnieuw de snelheden volgens Bernoulli (vergelijking 5) en vul deze in in tabel 5.

12. Vergelijk de verschillende snelheden in de vernauwing (B): de ongecorrigeerde Bernoulli-snelheid, de voor wrijving gecorrigeerde Bernoulli-snelheid en de gemeten snelheid. Vind je dat de wet van Bernoulli in de praktijk voldoende werkt? Probeer een verklaring te vinden voor de waargenomen verschillen.



Aventuri met Bernoulli

-De wet van Bernoulli toegepast-

Suggesties voor verder onderzoek

Documentatie

Daniel Bernoulli and the making of the fluid equation

Een pagina op de website van het Plus Magazine over de levensloop van Bernoulli.

<http://plus.maths.org/issue1/bern/index.html>

Oriëntatie op vervolgonderwijs

Het onderwerp van dit experiment kom je ook tegen in de volgende opleidingen van Wageningen Universiteit:

- Bodem, Water en Atmosfeer
- Agrotechnologie
- Levenmiddelen­technologie

Kijk voor meer informatie op www.wageningenuniversiteit.nl.

